26/5/17 Μάθημα 9ο

#7 | 6) $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

$\{0\}, \mathbb{Z}[i] \trianglelefteq \mathbb{Z}[i]$

$k\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Z}[i]$

$k\mathbb{Z}[i] \ntrianglelefteq \mathbb{Z}[i]$

$A=\{kn+mki \mid n,m\in\mathbb{Z}\} = k\{n+mi \mid n,m\in\mathbb{Z}\} \trianglelefteq \mathbb{Z}[i]$

$(kn+kmi)(\alpha+bi) = k(n+mi)(a+bi) = k(n'+m'i)\in A \trianglelefteq \mathbb{Z}[i]$

7) Ν.δ.ο το $4\mathbb{Z} \trianglelefteq 2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$4\mathbb{Z}$ πρώτο ή μέγιστο στο $2\mathbb{Z}$.

Γνωρίζω ότι $2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$ που είναι μέγιστο ιδεώδες

$4\mathbb{Z} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}$ δακτύλιοι

$4a(2b)=4\gamma\in 4\mathbb{Z} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}$

$4\mathbb{Z}$ όχι πρώτος στο $2\mathbb{Z}$

$2\in 2\mathbb{Z} \Rightarrow 4=2\cdot 2\in 4\mathbb{Z}$ όμως $2\notin 4\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}$ είναι αντιμεταθετικός, όχι μοναδιαίος

$4\mathbb{Z}$ (θα το δείξουμε) μέγιστο, αλλά όχι πρώτο.

Δείχνω ότι $4\mathbb{Z}$ μέγιστο:

$4\mathbb{Z} \subsetneq J \subsetneq 2\mathbb{Z} \Rightarrow \exists a\in J-4\mathbb{Z}$, $a\in 2\mathbb{Z}$ $a=2k$

ανήκει στο J όχι στο $4\mathbb{Z}$

$a\notin 4\mathbb{Z} \Rightarrow a\not\equiv 0 \bmod 4$

$2k\not\equiv 0 \bmod 4 \Rightarrow 4\nmid 2k \Rightarrow 2\nmid k \Leftrightarrow k=2m+1$.

$a=2(2k+1)\in J \supseteq 4\mathbb{Z} \Rightarrow a-4m\in J \Rightarrow 2\in J \Rightarrow$

$\Rightarrow J=2\mathbb{Z}$ Αδύνατο.

8) $I=\{(a,2b) \mid a,b\in\mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

Θα υποθέσω ότι: $I\subsetneq J \trianglelefteq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

$\exists (x,y)\in J-I$, $(x,y)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

$x\in\mathbb{Z}$, $y\notin 2\mathbb{Z} \Leftrightarrow y=2m+1$

$(x,2m)\in I\leq J \Rightarrow (x,y)-(x,2m)\in J$

$(0,1)\in J\leq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \Rightarrow (0,y)\in J \quad \forall y\in\mathbb{Z}$

$(x,0)\in J \quad \forall x\in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,0)+(0,y)\in J$
$(x,y)\in J \quad \forall x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow J=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

2). • $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ δακτυλιος θα το δειξω

$A\subseteq M(2\times 2,\mathbb{R})$ δακτυλιος

$A \underset{j}{\leq} M(2\times 2,\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c'\end{pmatrix}\in A$

και

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c'\end{pmatrix}\in A$

η διαφορά $\in A$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$ αρα $\in A$ αρα είναι υποδακτυλιος.

• $I=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}\trianglelefteq A$ μεγιστο

Θα παρω ενα στοιχειο θα το πολ/σω με ενα αλλο στοιχειο του και απο τις 2 πλευρες αν $\in I$ τοτε είναι ιδεωδες.

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in A \Rightarrow I\trianglelefteq A$ ωστε να ισχύει $I \lneq J \trianglelefteq A$

Αρα $\exists \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\in J-I$

δεν ανηκει στο I

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in I\subseteq J$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in J \Rightarrow c \in R$ και $a, b \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in J \Rightarrow J = A$ - Αδυνατο.

Το ιδιο και για J.

3) $S \leq R$, $I \Delta R$, $I \leq S \overset{\oplus}{\Rightarrow}$ το I ιδεωδες στο R αρα θα ειναι και στο S.
$S/_I \leq R/I$

⊕ Αρα οριζονται οι δακτυλιοι: S/I, R/I

$\left.\begin{array}{l} S/_I = \{ a+i \mid a \in S\} \\ R/_I = \{ r+I \mid r \in R\} \end{array}\right\} \Rightarrow S/_I \subseteq R/I$ θελουμε να δειξουμε οτι ειναι υποδακτυλιο

θ.δ.ο $(S/_I, +)$ ειναι αβελιανη ομαδα. Ισχυει γιατι S αβελιανη, I κανονικη στην $S \Rightarrow (S/_{I}, +)$ αβελιανη.

$(a+I) - (a'+I) = \underset{\in S}{(a-a')} + I \in S/_I$.

$a, a' \in S \leq R \Rightarrow$

$(a+I)(a'+I) = aa' + aI + Ia' + I^2 = aa' + I$

$I \Delta R \Rightarrow aI = Ia' = I = I^2$

$aa' \in S \Rightarrow aa' + I \in S/_I \Rightarrow S/I \leq R/I$

$S/I \Delta R/I$;;

Αν $S \Delta R \Rightarrow S/I \Delta R/_I \Leftrightarrow \underset{(sr+I)}{(s+I)(r+I)}$ και $(r+I)(s+I) \in S/_I$

$\left.\begin{array}{l} s \in S \Delta R \Rightarrow sr \in S \\ \Rightarrow rs \in S \end{array}\right\} \Rightarrow sr + I$ και $rs + I \in S/I$.

4) R μοναδιαιος
$U = \{$μοναδες$\} \Rightarrow \ldots$

5) $Z_2 \oplus Z_4$
$\{0\} \oplus Z_4$, $\{0\} \oplus 2Z_4$, $Z_2 \oplus 2Z_4 \Rightarrow$ Πρωτα

$a \in \mathbb{Z}_4$ ή $a \in 2\mathbb{Z}_4$

$(x,a)(y,\beta) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$(xy, a\beta)$

$xy = 0$ στο $\mathbb{Z}_2 \Rightarrow x = 0$ ή $y = 0$.

$a\beta \in 2\mathbb{Z}_4$

$a\beta = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow$ $a \in \mathbb{Z}_4$; $\beta = 0$ / $a = 0$; $\beta \in \mathbb{Z}_4$

$x = 0 = a \Rightarrow (0,0) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$x = 0$ και $a \in \mathbb{Z}_4$

$(x,a)(y,\beta) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$(0,3)(1,2) = (0,2) \in \{0\} \oplus 2\mathbb{Z}_4$

$(a,\beta)(\gamma,\delta) = (\underset{mod 2}{a\gamma}, \underset{mod 4}{\beta\delta}) \in \mathbb{Z}_2 \oplus \underset{\{0,2\}}{2\mathbb{Z}_4}$

$a\gamma \in \mathbb{Z}_2$ για οποιαδήποτε επιλογή

$\beta\delta \in 2\mathbb{Z}_4$ ← Αδύνατο, άρα β ή δ είναι άρτιος

Αν είχαμε $\beta = 2k+1$, $\delta = 2n+1 \Rightarrow \beta\delta \bmod 2 = 1$

Τότε το αντίστοιχο ζεύγος (a,β) ή $(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}_4$

Τα μέγιστα "ζουν" μέσα στα πρώτα γιατί είναι αντιμεταθετικοί μοναδιαίοι. Αλλά και τα δύο αυτά δεν μπορούν να "μεγαλώσουν" εκτός αν γίνουν ο αρχικός δακτύλιος.

6) $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομομορφισμοί δακτυλίων?

$x \mapsto |x|$

Όχι γιατί δεν ισχύει η πρόσθεση

$\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$x \mapsto \bar{x}$ είναι ισομορφισμός και επειδή πάει στον εαυτό του είναι αυτομορφισμός.

$\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a+bi \mapsto a$
Είναι επι ομομορφισμός ομάδων, $\phi(i \cdot i) = -1$ όμως,
$\phi(i) = 0 \Rightarrow \phi(i) \cdot \phi(i) = 0$ όμως $\phi(i \cdot i) \neq \phi(i) \cdot \phi(i)$

~~5α)~~
7) $2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$
Σαν προσθετικές ομάδες $\phi: 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} 3\mathbb{Z}$ έχει 2 γεννήτορες
οι πιθανοί ισομορφισμοί ομάδων
$2 \mapsto 3$
-3
Σαν δακτύλιοι: $\phi(2) = -3$, παίρνω αυτό:
$9 = \phi(2) \cdot \phi(2) = \phi(4) = \phi(2 \cdot 2) = \phi(2+2) = \phi(2) + \phi(2) =$
$= -6$. άρα δεν είναι.
Το ίδιο για το $\phi(2) = 3$
$9 = \phi(2) \cdot \phi(2) = \phi(4) = \phi(2 \cdot 2) = \phi(2+2) = \phi(2) + \phi(2)$
$= 6$

δεν είναι.

8) $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ομομορ. ομάδων
$1 \mapsto k$ εξετάζω αν είναι ομομ. ομάδων. Είναι $\forall k \in \mathbb{Z}$.
$2 \mapsto k + k = 2k$. Άρα βρήκαμε τους ομ. ομάδων και πάμε να εξετάσουμε αν είναι ομ. δακτυλίων.
$\phi(\alpha) = ak$
$\phi(\alpha\beta) = a\beta k$ όμως $\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha\beta) = ak\beta k$
θα πρέπει να είναι ίσα.
$\alpha\beta k = a\beta k^2 \Rightarrow a\beta k(1-k) = 0$.
Παίρνω περιπτώσεις:
αν $k = 0 \Rightarrow$ ισχύει (είναι ο τετριμμένος).
αν $k \neq 0 \Rightarrow (\alpha, \beta \neq 0)$ $1-k = 0 \Leftrightarrow k = 1$
Ή ο τετριμμένος $\phi(1) = 0$
ο ταυτοτικός $\phi(1) = 1$.

9) $\phi : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(1,1) \longmapsto (1,0)+(0,1)$

$\left.\begin{array}{l}(1,0) \longmapsto \kappa \\ (0,1) \longmapsto \lambda\end{array}\right\} \to (1,1) \mapsto \kappa+\lambda$

$(a,b) \longmapsto a\kappa+b\lambda$

$(1,1) \longmapsto \kappa+\lambda$

$(1,1)(1,1) \longmapsto (\kappa+\lambda)^2$

Άρα έχω $\kappa+\lambda=(\kappa+\lambda)^2 \Rightarrow (\kappa+\lambda)(\kappa+\lambda-1)=0$

Αν $\kappa=-\lambda$ τότε $(1,1)\mapsto 0$, $(1,0)\mapsto \kappa$, $(0,1)\mapsto -\kappa$

είναι ομομορ. δακτυλίων

$(1,0)\mapsto \kappa$ θα πρέπει $(1,0)(1,0)\longmapsto \kappa^2$

$(1,0) \longmapsto \kappa$.

Άρα $\kappa=0$ ή $\kappa=1$.

$\left.\begin{array}{l}(0,1)\mapsto -1 \\ (0,1)(0,1)\mapsto (-1)^2\end{array}\right\}$ Άρα έχουμε $\kappa=0$

Θα πρέπει να εξετάσω τώρα το $\kappa+\lambda-1=0$.

$\kappa+\lambda=1$ δηλ. $(1,1)\mapsto 1$. άρα $\kappa=1-\lambda$.

$(1,0)\mapsto \kappa \Rightarrow \kappa=0$ ή $\kappa=1$

$(0,1)\mapsto 1-\kappa \Rightarrow (0,1)\mapsto 1$ ή 0.

10) Θεωρητική !

11) $\mathbb{Q}\cong\mathbb{R}$

Υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$\exists\, \phi: \mathbb{Q}\cong\mathbb{R}$ δακτυλίων

$\exists\, a\in\mathbb{Q} : \phi(a)=2=(\sqrt{2})^2$ άρα $a=2$.

$\exists\, b : \phi(b)=\sqrt{2} \Rightarrow \phi(b^2)=(\phi(b))^2=(\sqrt{2})^2=2=\phi(2)$.

ϕ 1-1 $\Rightarrow b=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow$ Δεν υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων.

Κριτηριο Eisenstein

$f(x) = a_\nu x^\nu + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Αν $\exists$ p πρωτος, ωστε $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}$, $p \nmid a_\nu$ και $p^2 \nmid a_0$. Τοτε $f(x)$ ειναι αναγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

Θεωρημα: Εστω p πρωτος και $f(x) = a_\nu x^\nu + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Ονομαζουμε $\overline{f(x)} = \bar{a}_\nu x^\nu + \dots + \bar{a}_0 \bmod p$. Τωρα $\overline{f(x)} \in \mathbb{Z}_p[x]$. Αν $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$ και $\overline{f(x)}$ ειναι αναγωγο στον $\mathbb{Z}_p[x]$, τοτε και το $f(x)$ ειναι αναγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.

αποδειξη:

Επειδη $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)}$ εχουμε $p \nmid a_\nu$.

Υποθετουμε οτι $f(x)$ αναγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ και $\overline{f(x)}$ οχι αναγωγο στον $\mathbb{Z}_p[x]$

$\overline{f(x)} = \overline{g(x)}\,\overline{h(x)}$ και ισχυει $\deg f(x) = \deg \overline{f(x)} = \deg \overline{g(x)} + \deg \overline{h(x)}$.

Αλλα τοτε θα ειχαμε οτι $f(x) = g(x) h(x)$.

παραδειγμα: ~~f(x)~~ $x^3 + 2x + 20 \in \mathbb{Z}[x]$ να εξετασετε αν ειναι αναγωγο.

Λυση

Eisenstein: $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}$, $p \nmid a_\nu$, $p^2 \nmid a_0$

$p = 2$: Αλλα $4 \mid a_0 = 20$ αρα δεν εφαρμοζεται.

[Αν ειναι τριτοβαθμιο κ δεν ειναι αναγωγο θα σπασει σε 2ο-βαθμιο κ 1ο-βαθμιο ή 3 φορες 1ο-βαθμιο]

Επειδη το $f(x)$ ειναι 3-βαθμιο και $\overline{f(x)}$ επισης για οποιοδηποτε p πρωτο στον $\mathbb{Z}_p[x]$, αρα το $\overline{f(x)}$ αν δεν ειναι αναγωγο, θα εχει ριζα.

για $p = 2 \Rightarrow \overline{f(x)} = x^3$ οχι αναγωγο

για $p = 3 \Rightarrow \overline{f(x)} = x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$

ριζες: $\overline{f(0)} \neq 0$, $\overline{f(1)} \neq 0$, $\overline{f(2)} \neq 0$. Αρα $\overline{f(x)}$

ανάγωγο στον $\mathbb{Z}_3[x]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$.